

DOI:10.11918/201908100

直升机悬停状态下的振动计算

姚 颂, 芮筱亭, 王景弘

(南京理工大学 能源与动力工程学院, 南京 210094)

摘 要: 为降低直升机的共振危害, 需要一种对直升机在空中悬停时振动特性快速计算方法. 旋翼在离心力作用下, 固有频率受应力刚化效应影响发生变化, 同时存在旋翼桨叶/桨叶和旋翼/机身的耦合影响, 动力学分析十分复杂, 另一方面为提高计算效率, 运动方程的低阶次、程式化成为迫切的需求. 多体系统传递矩阵法 (Transfer matrix method for multibody systems, MSTMM) 同时解决了这两个问题. 为准确快速计算悬停直升机固有频率, 本研究基于 MSTMM 建立一种柔性四片旋翼与直升机机身耦合的动力学模型, 推导出系统的动力学拓扑模型、总传递方程和特征方程. 重点推导了空间旋转梁和旋转轴的传递矩阵, 最终快速计算得出悬停直升机系统固有频率. 研究表明: 空间旋转梁 MSTMM 计算结果和 ANSYS Workbench 仿真结果对比, 误差不超过 2%, 旋转轴 MSTMM 计算结果与参考文献结果基本一致; 机尾固定的约束条件下, 计算出 36.651 9 rad/s 转速下旋翼/机身耦合系统的前 13 阶固有频率, 与 ANSYS Workbench 仿真结果一致, 改为悬停无约束条件, 计算得出悬停直升机系统前 8 阶固有频率, 计算速度相较仿真速度提升了 7.1 倍, 为直升机动力学分析提供一种新思路.

关键词: 多体系统传递矩阵法 (MSTMM); 直升机; 旋转梁; 旋转轴; 应力刚化

中图分类号: O321 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2021)06-0104-08

Calculation of helicopter vibration in hovering state

YAO Song, RUI Xiaoting, WANG Jinghong

(School of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: To reduce the resonance hazard of helicopters, a fast calculation method for the vibration characteristics of helicopters when hovering in the air is needed. Under the action of centrifugal force, the natural frequency of the rotor changes under the influence of the stress stiffening effect, and there are coupling effects of rotor blades/ blades and rotors/fuselage at the same time, which makes the dynamics analysis complicated. On the other hand, in order to improve the calculation efficiency, the low-order and stylization of the kinetics equation has become an urgent need. The transfer matrix method for multibody systems (MSTMM) can solve these problems at the same time. In order to accurately and quickly calculate the natural frequencies of hovering helicopters, a dynamic model of the coupling between the four flexible rotors and the helicopter fuselage was established based on MSTMM, and the dynamic topology model, total transfer equation, and characteristic equation of the system were derived. The transfer matrix of the spatial rotating beam and spinning axis was derived in detail, and the natural frequency of the hovering helicopter system could be quickly calculated. The research shows that the error between the MSTMM calculation results and the ANSYS Workbench simulation results of the spatial rotating beam was not more than 2%, and the MSTMM calculation results of the spinning axis were basically consistent with those in literature. Under the constraints of fixed tail, the first 13 order natural frequencies of the rotor/fuselage coupling system were calculated at the speed of 36.651 9 rad/s, which were consistent with the simulation results of ANSYS Workbench. When the hovering was not restricted, the first eight order natural frequencies of the hovering helicopter system were calculated, and the calculation speed was increased 7.1 times compared with the simulation speed. The results provide a new idea for helicopter dynamics analysis.

Keywords: transfer matrix method for multibody systems (MSTMM); helicopter; rotating beam; spinning axis; stress stiffness

振动是影响直升机发展的主要问题之一. 对于大多数现代直升机而言, 机动能力和最大前进速度

受到过度振动的限制. 发动机、变速箱、尾桨和旋翼质量不平衡都是振动激励源. 然而直升机振动的主要来源是主旋翼. 振动对直升机操作的几乎所有方面都是有害的, 包括飞行员疲劳和结构完整性; 降低电子设备的可靠性和操作准确度; 影响相机和测量设备等机器的精度. 旋翼桨叶可以模拟为旋转

收稿日期: 2019-08-19
基金项目: 装备预先研究专用技术项目 (30103010402)
作者简介: 姚 颂 (1995—), 男, 硕士研究生;
芮筱亭 (1956—), 男, 教授, 博士生导师
通信作者: 芮筱亭, ruixt@163.net

梁^[1], 由于弹性变形和刚体运动的耦合, 旋转梁的振动特性与非旋转梁的振动特性有很大差异^[2]. 沿着梁长度变化的离心力改变了梁的整体刚度(应力刚化效应), 使固有频率和模态发生变化^[3]. 众多研究人员针对不同的课题, 采用不同的方法研究了旋转梁的动态特性. 例如 Southwell 原理、积分矩阵法、Rayleigh Ritz 法^[4]、Galerkin 法^[5]和扰动法, 以及动态刚度法, 这涉及到幂级数解及使用 Frobenius 方法计算相应微分方程的解^[6]. 传统的有限元法(Conventional finite element method, CFEM)^[7]已被用于许多分析旋翼固有频率的问题. 一种基于低自由度模型的谱有限元法(Spectral finite element method, SFEM)^[8]被用于分析旋转锥形梁的运动特性. 传递矩阵法用于非旋转锥形梁^[9]和带裂纹的旋转梁^[10]的自由振动计算.

有限元法和多体系统动力学是武器系统动力学的重要基础. 然而, 使用这些方法对多刚柔体耦合的复杂武器系统的振动特性计算可能带来很大的计算量和由计算不良条件引起的计算奇点. 多体系统传递矩阵方法(MSTMM)^[11-13]可以避免复杂线性多系统特征值问题的计算错误, 因为系统总矩阵阶次较低, 显著提高了振动特性的计算速度^[14]. 本文基于 MSTMM, 建立了耦合直升机四叶片旋翼/机身的多体系统动力学模型. 推导出整体传递方程, 并模拟了旋翼振动特性. 为了证明所提出方案的准确性, 与商业软件 ANSYS Workbench 仿真结果进行比较.

1 建模与传递矩阵推导

1.1 直升机拓扑模型

图 1 中所示的典型直升机可以建模为多刚性-柔性耦合系统, 直升机主要分为旋翼系统、机身和机尾 3 个部分.



图 1 典型直升机模型
Fig. 1 Typical helicopter model

拓扑结构如图 2 所示, 四桨叶/机身耦合系统的动力学模型在空间内振动. 全局惯性系 $oxyz$ 用于描述系统运动. 本文将直升机模型简化为 8 个元件, 分别是 4 个旋转 Euler-Bernoulli 梁组成的无铰接柔性桨叶、桨毂、传动轴、机身和尾梁 8 个部分. 元件编号 1 至 4 号是桨叶, 考虑其在挥舞方向、摆振方向及扭转方向的振动, 桨叶通过柔性连接到 5 号元件桨毂, 桨毂处理为一个空间刚体, 桨毂连接至元件 6 传动轴, 传动轴处理为一根围绕中心轴旋转的梁, 传动轴与元件 7 机身相连, 机身处理为一个刚体, 机身与元件 8 尾梁为刚性连接. 旋翼与传动轴以同一转速旋转, 旋转角速度为 Ω .

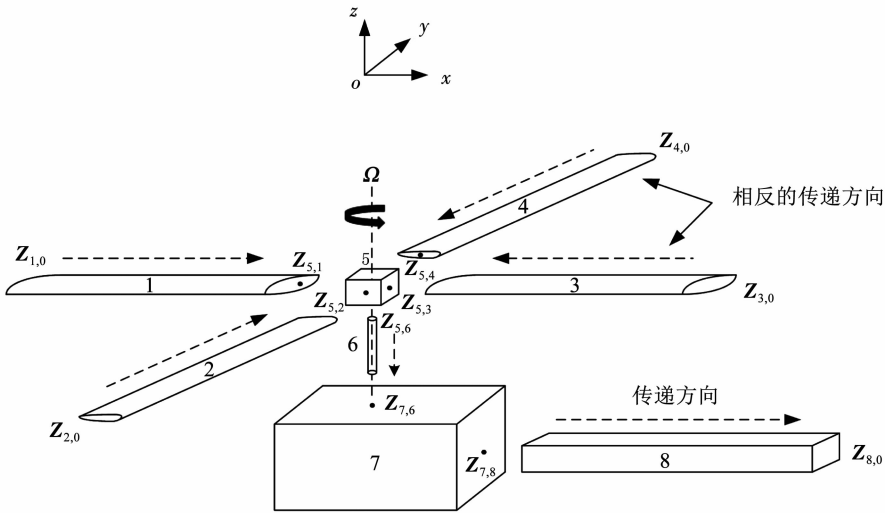


图 2 直升机拓扑模型
Fig. 2 Helicopter topology model

1.2 系统总传递矩阵的推导

递矩阵法使用状态矢量描述力学系统中任一点

的力学状态, 坐标系方向及符号约定如图 3 所示, 状态矢量是由两部分元素构成的一个列阵, 一是该点

状态变量的位移及角位移 $(x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$, 二是内力及内力矩 $(q_x, q_y, q_z, m_x, m_y, m_z)$. 多自由度无阻尼振动系统可由模态振动叠加而成, 某阶模态下固有频率 ω_k 对应的状态矢量可以表示为 $z = Z^k e^{-i\omega_k t}$, Z^k 为模态坐标下的状态矢量, 其状态变量为固有频率 ω_k 对应的位移及内力的模态坐标, 为了书写简洁将上标 k 省略, 即 $Z_{i,j} = [X, Y, Z, \Theta_x, \Theta_y, \Theta_z, M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, Q_z]^T$, 其中 i 为体元件编号, j 为铰元件编号.

系统总传递方程由总传递方程和几何方程构成, 总传递方程的状态矢量由所有边界点的状态矢量构成. 主传递方程中的每一个系数矩阵为从相应边界点到系统根的传递路径上所有元件传递矩阵的连乘积. 几何方程用来描述同一元件不同输入点之间的几何关系, 其系数矩阵可以在推导主传递方程的过程中依据同一元件不同输入点之间的几何关系自动导出. 对于每一个分支, 都可以根据同一个体元件不同输入点的几何关系推导出一组几何方程, 几何方程的个数等于系统树梢个数减 1. 几何方程的系数矩阵为由从边界端到分叉体元件的输入端 $I_k (k=1, 2, \dots, L)$ 路径上各个元件的传递矩阵的连乘积, 再左乘 $(-H_{j,1})$ (若 $k=1$), 或左乘 $(H_{j,k})$ (若 $k=2, \dots, L$).

在线性系统中 $Z_o = U_j Z_l$, 其中 Z_l 为输入点的状态矢量, Z_o 为输出点状态矢量, U_j 为元件 j 的传递矩阵, 由牛顿力学定律推导得到, 总传递矩阵 U_{all} 为沿传递路径各元件传递矩阵依次连乘之积. 最终整理可以得到 $U_{all} Z_{all} = 0$, 其中 Z_{all} 为各边界点的状态矢量和, U_{all} 即为总传递矩阵.

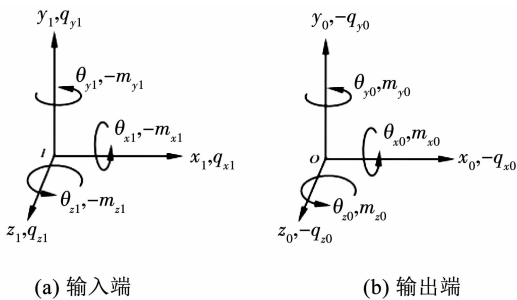


图 3 坐标系及符号约定

Fig. 3 Coordinate system and symbol convention

如图 2 拓扑图所示, 该模型共有 4 个边界点, 分别为 $Z_{1,0}, Z_{2,0}, Z_{3,0}, Z_{4,0}, Z_{8,0}$, 以 $Z_{8,0}$ 为输出点, 系统的传递矩阵推导如下:

$$\begin{aligned} Z_{8,0} &= U_8 Z_{7,8} = U_8 U_7 Z_{7,6} = U_8 U_7 U_6 Z_{5,6} = \\ &= U_8 U_7 U_6 (U_{5,I_1} Z_{5,1} + U_{5,I_2} Z_{5,2} + \\ &= U_{5,I_3} Z_{5,3} + U_{5,I_4} Z_{5,4}) = U_8 U_7 U_6 (U_{5,I_1} U_1 Z_{1,0} + \\ &= U_{5,I_2} U_2 Z_{2,0} + U_{5,I_3} U_3 Z_{3,0} + U_{5,I_4} U_4 Z_{4,0}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &U_8 U_7 U_6 U_{5,I_1} U_1 Z_{1,0} + U_8 U_7 U_6 U_{5,I_2} U_2 Z_{2,0} + \\ &U_8 U_7 U_6 U_{5,I_3} U_3 Z_{3,0} + U_8 U_7 U_6 U_{5,I_4} U_4 Z_{4,0}, \end{aligned} \quad (1)$$

或

$$T_{8-1} Z_{1,0} + T_{8-2} Z_{2,0} + T_{8-3} Z_{3,0} + T_{8-4} Z_{4,0} - Z_{8,0} = 0, \quad (2)$$

其中:

$$\begin{aligned} T_{8-1} &= U_8 U_7 U_6 U_{5,I_1} U_1, T_{8-2} = U_8 U_7 U_6 U_{5,I_2} U_2, \\ T_{8-3} &= U_8 U_7 U_6 U_{5,I_3} U_3, T_{8-4} = U_8 U_7 U_6 U_{5,I_4} U_4. \end{aligned}$$

模型中有一个分叉点, 4 个分支, 所以共有 3 个几何方程. 第 1 个几何方程如下:

$$-H_{5,1} U_1 Z_{1,0} + H_{5,2} U_2 Z_{2,0} = 0, \quad (3)$$

或

$$G_{5-1} Z_{1,0} + G_{5-2} Z_{2,0} = 0, \quad (4)$$

其中:

$$G_{5-1} = -H_{5,1} U_1 Z_{1,0}, G_{5-2} = H_{5,2} U_2 Z_{2,0}.$$

第 2 个几何方程如下:

$$-H_{5,1} U_1 Z_{1,0} + H_{5,3} U_3 Z_{3,0} = 0, \quad (5)$$

或

$$G_{5-1} Z_{1,0} + G_{5-3} Z_{3,0} = 0, \quad (6)$$

其中:

$$G_{5-1} = -H_{5,1} U_1 Z_{1,0}, G_{5-3} = H_{5,3} U_3 Z_{3,0}.$$

第 3 个几何方程如下:

$$-H_{5,1} U_1 Z_{1,0} + H_{5,4} U_4 Z_{4,0} = 0, \quad (7)$$

或

$$G_{5-1} Z_{1,0} + G_{5-4} Z_{4,0} = 0, \quad (8)$$

其中:

$$G_{5-1} = -H_{5,1} U_1 Z_{1,0}, G_{5-4} = H_{5,4} U_4 Z_{4,0}.$$

联立式(2)、(4)、(6)、(8), 可得

$$U_{all} |_{30 \times 60} Z_{all} |_{60 \times 1} = 0, \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} U_{all} &= \begin{bmatrix} T_{8-1} |_{12 \times 12} & T_{8-2} |_{12 \times 12} & T_{8-3} |_{12 \times 12} & T_{8-4} |_{12 \times 12} & -I |_{12 \times 12} \\ G_{5-1} |_{6 \times 12} & G_{5-2} |_{6 \times 12} & 0 |_{6 \times 12} & 0 |_{6 \times 12} & 0 |_{6 \times 12} \\ G_{5-1} |_{6 \times 12} & 0 |_{6 \times 12} & G_{5-3} |_{6 \times 12} & 0 |_{6 \times 12} & 0 |_{6 \times 12} \\ G_{5-1} |_{6 \times 12} & 0 |_{6 \times 12} & 0 |_{6 \times 12} & G_{5-4} |_{6 \times 12} & 0 |_{6 \times 12} \end{bmatrix}, \\ Z_{all} &= [Z_{1,0} \quad Z_{2,0} \quad Z_{3,0} \quad Z_{4,0} \quad Z_{8,0}]^T. \end{aligned}$$

由系统的边界条件可知, Z_{all} 中的第 7-12、19-24、31-36、43-48 和 55-60 个元素为零, 从 Z_{all} 中去掉这些零元素, 并在 U_{all} 中去掉与这些零元素对应的列, 得 $\bar{U}_{all} |_{30 \times 30} \bar{Z}_{all} |_{30 \times 30}$. $\bar{U}_{all}$ 只与系统固有频率 ω 相关, 可得特征方程 $\Delta = |\bar{U}_{all}| = 0$ 时的频率 ω 就是固有频率. 通过逐步搜索法就可以确定系统的固有频率.

2 主要元件传递矩阵的推导

2.1 旋转梁的传递矩阵的推导

直升机旋翼是一根绕一端旋转的细长梁, 模型简化为一根欧拉伯努利梁, 对一根质心轴与弹性轴重合的欧拉伯努利梁来说, 不考虑弯扭耦合. 图4是摆振方向振动平面内的示意图, $\hat{o}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ 为整体坐标系, 长为 L 的梁一端连接在半径为 r_H 的桨毂上, 绕 $\hat{z}$ 轴以 Ω 的角速度旋转. 假设梁不可延长, 轴向存在沿着 x 变化的离心力 ($F(x)$ 导致梁刚度增加) 以及施加在末端的常力 F_0 . 通过运用 Hamilton 原理可以得到梁在挥舞方向的运动微分方程^[15].

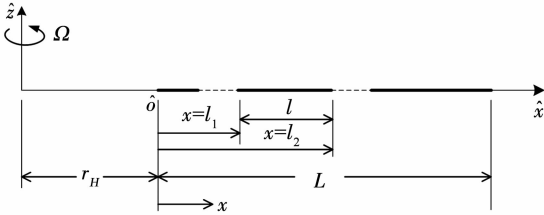


图4 旋转梁挥舞方向振动的符号约定和坐标系

Fig. 4 Symbol convention and coordinate system for vibration of rotating beam in flapwise direction

z 为在 $\hat{z}$ 轴上的横向位移, 梁的势能可以得到:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (z'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L F(x) (z')^2 dx, \quad (10)$$

式中 r_H 为梁的输入端距离旋转轴的距离, 其中离心力 $F(x)$ 可以表示为

$$F(x) = \int_y \bar{m} \Omega^2 (r_H + x) dx + F_0 = \bar{m} \Omega^2 (0.5L^2 - r_H x - 0.5x^2 + r_H L) + F_0, \quad (11)$$

式中 $\bar{m}$ 为梁的线质量, 当梁的末端完全自由时 $F_0 = 0$, 离心力对 x 的一阶导为

$$F'(x) = -\bar{m} \Omega^2 (r_H + x). \quad (12)$$

梁的动能 T 由下式给出:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \bar{m} \dot{z}^2 dx. \quad (13)$$

Hamilton 原理可以表示如下:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0. \quad (14)$$

将式(10)、(13)代入式(14)中, 可以得到挥舞方向振动的运动微分方程:

$$(EIz'')'' - (F(x)z')' + \bar{m} \ddot{z} = 0. \quad (15)$$

将式(15)中位移改写为谱坐标形式, 即 $z(x, t) = Z(x) e^{i\omega t}$, 并代入式(11)、(12), 化简方程可得

$$Z^{IV}(x) - (0.5C_1 + r_H C_1 x + C_2) Z''(x) + C_1(r_H + x) Z'(x) + C_3 Z(x) = 0, \quad (16)$$

其中:

$$C_1 = \frac{\bar{m} \Omega^2}{EI}, \quad C_2 = -C_1 L^2 (0.5 + \frac{r_H}{L}) - \frac{F_0}{EI}, \quad C_3 = -\frac{\bar{m} \omega^2}{EI}.$$

方程(16)的根是使用幂级数中的 Frobenius 方法计算的, 并且可以假设该微分方程的解如下:

$$\begin{cases} Z(x, k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}(k) x^{k+i}, \\ \frac{dZ(x, k)}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty} (k+i) a_{i+1}(k) x^{k+i-1}, \\ \frac{d^2 Z(x, k)}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (k+i)(k+i-1) a_{i+1}(k) x^{k+i-2}, \\ \frac{d^3 Z(x, k)}{dx^3} = \sum_{i=0}^{\infty} (k+i)(k+i-1) \times \\ \quad (k+i-2) a_{i+1}(k) x^{k+i-3}, \\ \frac{d^4 Z(x, k)}{dx^4} = \sum_{i=0}^{\infty} (k+i)(k+i-1)(k+i-2) \times \\ \quad (k+i-3) a_{i+1}(k) x^{k+i-4}. \end{cases} \quad (17)$$

将式(17)代入式(16)中, 可以得到:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} (k+i-3)(k+i-2)(k+i-1) a_{i+1}(k) x^{k+i-4} + \\ & (0.5C_1 x^2 + r_H C_1 x + C_2) \sum_{i=0}^{\infty} (k+i-1)(k+i) a_{i+1}(k) x^{k+i-2} + \\ & (C_1 x + C_1 r_H) \sum_{i=0}^{\infty} (k+i) a_{i+1}(k) x^{k+i-1} + \\ & C_3 \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}(k) x^{k+i} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

上式也可以写为如下形式:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-4}^{\infty} \{ (k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4) a_{i+5} + \\ & C_2 (k+i+1)(k+i+2) a_{i+3} + C_1 r_H (k+i+1)^2 a_{i+2} + \\ & [C_1 (k+i) + 0.5C_1 (k+i-1)(k+i) + C_3] a_{i+1} \} x^{k+i}. \end{aligned} \quad (19)$$

代入 $i = -4$ 到式(19)中, 可以发现只有 a_1 得系数非零, 其他的项都等于0. 因此, 将 $i = -4$ 代入式(19)中, 发现 a_1 是最低阶非消失系数, 得到 $k(k-1)(k-2)(k-3)a_1 = 0$, 其中 $a_1 \neq 0$, 那么 k 只有0, 1, 2 和3 这4个根满足方程 $k(k-1)(k-2)(k-3) = 0$, 并且 a_1 是任意数, 这里假设 $a_1 = 1$, 式(19)中的未知系数的一般形式可以用以下表达:

$$a_{i+5} = -\frac{C_2}{(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+3} + \frac{r_H C_1 (k+i+1)}{(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+2} +$$

$$\frac{C_1(k+i) + 0.5C_1(k+i-1)(k+i) + C_3}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)}a_{i+1}. \quad (20)$$

分别将 $i = -3, i = -2, i = -1$ 及 $i = 0$ 代入式(20)中,依次得到:

$$\begin{cases} a_2 = 0, \\ a_3 = -\frac{C_2}{(k+1)(k+2)}a_1, \\ a_4 = -\frac{r_H C_1 k}{(k+1)(k+2)(k+3)}a_1, \\ a_5 = -\frac{C_2}{(k+3)(k+4)}a_3 - \frac{0.5C_1 k(k+1) + C_3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}a_1. \end{cases} \quad (21)$$

从式(19)、(20)可以确定所有未知系数,对于 $k=0,1,2,3$,微分方程式(19)的解可以用4个独立线性解的总和乘以任意常数表示如下:

$$Z(x) = A_1 f(x,0) + A_2 f(x,1) + A_3 f(x,2) + A_4 f(x,3), \quad (22)$$

式中 $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3, A_4]^T$ 是任意常数,方程(22)中 $k=0,1,2,3$ 的4个独立解 $f(x,k)$ 可以用函数的形式表示如下:

$$\begin{aligned} f(x,k) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}(k)x^{k+i} \Rightarrow \\ f(x,0) &= a_1(0)x^0 + a_3(0)x^2 + a_4(0)x^3 + a_5(0)x^4 + \dots, \\ f(x,1) &= a_1(1)x^1 + a_3(1)x^3 + a_4(1)x^4 + a_5(1)x^5 + \dots, \\ f(x,2) &= a_1(2)x^2 + a_3(2)x^3 + a_4(2)x^4 + a_5(2)x^5 + \dots, \\ f(x,3) &= a_1(3)x^3 + a_3(3)x^4 + a_4(3)x^5 + a_5(3)x^6 + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

由材料力学可得旋转梁在此平面内的弯矩和剪切力,分别为:

$$M_y = EI \frac{d^2 Z(x)}{dx^2}, \quad (24)$$

$$Q_z = EIZ'''(x) - 0.5\bar{m}\Omega^2(L^2 + 2r_H L - 2r_H x - x^2)Z'(x) - F_0 Z'(x). \quad (25)$$

在 MSTMM 中,桨叶挥舞方向 $z-x$ 平面内的边界条件为 $[Z, \Theta_y, M_y, Q_z]^T$,根据线性关系可以得到 $\Theta_y = Z'$,联立式(24)、(25),可以写成如下形式 $Z(x) = D(x)\mathbf{A}$.

$$\begin{bmatrix} Z \\ \Theta_y \\ M_y \\ Q_z \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} f(x,0) & f(x,1) & f(x,2) & f(x,3) \\ f'(x,0) & f'(x,1) & f'(x,2) & f'(x,3) \\ EI f''(x,0) & EI f''(x,1) & EI f''(x,2) & EI f''(x,3) \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中:

$$\begin{aligned} H_1 &= EI[f'''(x,0) + \gamma f'(x,0)], \\ H_2 &= EI[f'''(x,1) + \gamma f'(x,1)], \end{aligned}$$

$$H_3 = EI[f'''(x,2) + \gamma f'(x,2)],$$

$$H_4 = EI[f'''(x,3) + \gamma f'(x,3)],$$

$$\gamma = (0.5C_1 x^2 + r_H C_1 x + C_2).$$

由式(26)可以得到在 $x = l_1$ 作为输入端的状态量为 $\mathbf{Z}_l = [\mathbf{D}(l_1)]\mathbf{A}$,从而这组未知的系数向量可以表示为 $\mathbf{A} = [\mathbf{D}(l_1)]^{-1}\mathbf{Z}_l$,那么位于 $x = l_2$ 的输出端的状态矢量为

$$\mathbf{Z}_0 = [\mathbf{D}(l_2)]\mathbf{A} = [\mathbf{D}(l_2)][\mathbf{D}(l_1)]^{-1}\mathbf{Z}_l = \mathbf{U}^{RB}\mathbf{Z}_l, \quad (27)$$

式中 $\mathbf{U}^{RB} = [\mathbf{D}(l_2)][\mathbf{D}(l_1)]^{-1}$ 为旋转梁在挥舞平面内横向振动的传递矩阵.

同理,在摆振运动平面内也以此方法获得其传递矩阵,但在离心力部分略有不同,由于离心力的作用方向分为摆振方向和展向分量,因此运动微分方程为

$$EI_z y^{IV} - F(x)y'' - F'(x)y' - \Omega^2 m y + m \ddot{y} = 0. \quad (28)$$

非圆截面梁的扭转通过材料力学可以得知微段的扭转角 φ 与扭矩 T 的关系为

$$\varphi = \frac{T}{G\beta h b^3} = \frac{T}{GI_t}. \quad (29)$$

式中: G 为剪切模量; h 为截面长边; b 为截面短边; β 为矩形截面杆扭转时的因数,当 h/b 远大于 10 时, β 近似等于 0.333, $I_t = \beta h b^3$. 在扭转方向上由于螺旋效应的影响,即由离心力 Ω 引起回复力矩,扭转振动的运动微分方程为

$$(GI_t \varphi')' - I_\alpha (\ddot{\varphi} + \Omega^2 \varphi) = 0, \quad (30)$$

其中 I_α 为微段绕扭转轴的转动惯量.

通过求解式(30)这个微分方程,最终可以得到长为 x 的旋转梁扭转振动的传递矩阵如下:

$$U_t = \begin{bmatrix} \cos \gamma x & \frac{1}{\gamma GI_t} \sin \gamma x \\ -\gamma GI_t \sin \gamma x & \cos \gamma x \end{bmatrix}, \quad (31)$$

式中 $\gamma = \sqrt{\frac{I_\alpha}{GI_t}(\omega^2 - \Omega^2)}$,将得到的矩阵进行按力学关系进行组装,可到一根空间旋转梁的传递矩阵.

2.2 传动轴的传递矩阵的推导

推导传动轴的传递矩阵,首先确定其运动微分方程.建立如图5所示模型,一根长为 L 的均质 Euler-Bernoulli 梁绕 Z 轴以角速度 Ω 旋转,线质量为 $\bar{m}$ 且在 YZ 平面与 XZ 中的主轴弯曲刚度分别是 EI_{xx} 和 EI_{yy} ,距离原点 z 处的截面质心点 P 在 X 轴和 Y 轴上的位移分别是 u 和 v ,通过 Hamilton 原理得到其运动微分方程为^[16]

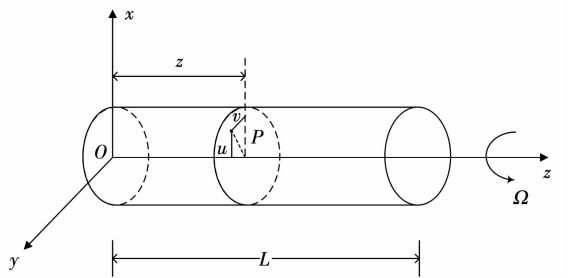
$$\begin{cases} EI_{yy} u'''' - 2m\Omega \dot{v} - m\Omega^2 u + m\ddot{u} = 0, \\ EI_{xx} v'''' - 2m\Omega \dot{u} - m\Omega^2 v + m\ddot{v} = 0. \end{cases} \quad (32)$$


图 5 旋转轴模型
Fig.5 Spinning axis model

代入模态坐标 $u(z,t) = U(z) e^{i\omega t}$ 和 $v(z,t) = V(z) e^{i\omega t}$, 并引入量纲一的长度 $\xi = z/L$ 与微分算子 $D = d/d\xi$, 整理后式(33)变为

$$\begin{cases} (D^4 - \frac{m\omega^2 L^4}{EI_{yy}} - \frac{m\Omega^2 L^4}{EI_{yy}}) U - \frac{2m\Omega\omega L^4}{EI_{yy}} V = 0, \\ (D^4 - \frac{m\omega^2 L^4}{EI_{xx}} - \frac{m\Omega^2 L^4}{EI_{xx}}) V - \frac{2m\Omega\omega L^4}{EI_{xx}} U = 0. \end{cases} \quad (33)$$

对式(33)求解后分别得到 $U(\xi)$ 和 $V(\xi)$ 的通解:

$$\begin{aligned} U(\xi) &= A_1 \sin \sqrt{\alpha} \xi + A_2 \cos \sqrt{\alpha} \xi + A_3 \sinh \sqrt{\alpha} \xi + \\ &\quad A_4 \cosh \sqrt{\alpha} \xi + A_5 \sin \sqrt{\beta} \xi + A_6 \cos \sqrt{\beta} \xi + \\ &\quad A_7 \sinh \sqrt{\beta} \xi + A_8 \cosh \sqrt{\beta} \xi, \\ V(\xi) &= B_1 \sin \sqrt{\alpha} \xi + B_2 \cos \sqrt{\alpha} \xi + B_3 \sinh \sqrt{\alpha} \xi + \\ &\quad B_4 \cosh \sqrt{\alpha} \xi + B_5 \sin \sqrt{\beta} \xi + B_6 \cos \sqrt{\beta} \xi + \\ &\quad B_7 \sinh \sqrt{\beta} \xi + B_8 \cosh \sqrt{\beta} \xi. \end{aligned} \quad (34)$$

$A_1 - A_8$ 与 $B_1 - B_8$ 是两组独立的 8 个常系数, 其之间的关系如下:

$$\begin{aligned} (A_1, A_2, A_3, A_4) &= k_\alpha (B_1, B_2, B_3, B_4), \\ (A_5, A_6, A_7, A_8) &= k_\beta (B_5, B_6, B_7, B_8), \end{aligned} \quad (35)$$

其中:

$$\begin{aligned} k_\alpha &= \frac{2\lambda_x^2 \eta}{\alpha^2 - \lambda_x^2 (1 + \eta^2)}, \quad k_\beta = \frac{2\lambda_y^2 \eta}{\beta^2 - \lambda_y^2 (1 + \eta^2)}, \\ \lambda_x^2 &= \frac{m\omega^2 L^4}{EI_{xx}}, \quad \lambda_y^2 = \frac{m\omega^2 L^4}{EI_{yy}}, \quad \eta^2 = \frac{\Omega^2}{\omega^2}, \\ \alpha &= \frac{1}{2} \{ (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) (1 + \eta^2) + \\ &\quad \sqrt{(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)^2 (1 + \eta^2)^2 + 16\lambda_x^2 \lambda_y^2 \eta^2} \}, \\ \beta &= \frac{1}{2} \{ (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) (1 + \eta^2) - \\ &\quad \sqrt{(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)^2 (1 + \eta^2)^2 + 16\lambda_x^2 \lambda_y^2 \eta^2} \}. \end{aligned}$$

由式(32)可以得出扭转角, 弯矩与剪切力的表达式如下:

$$\begin{aligned} \theta_x &= -\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{L} \frac{dV}{d\xi}, \quad \theta_y = -\frac{dU}{dz} = -\frac{1}{L} \frac{dU}{d\xi}; \quad (36) \\ M_x &= EI_{xx} \frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{EI_{xx}}{L^2} \frac{d^2 V}{d\xi^2}, \quad (37) \\ M_y &= -EI_{yy} \frac{d^2 U}{dz^2} = -\frac{EI_{yy}}{L^2} \frac{d^2 U}{d\xi^2}; \\ S_x &= EI_{yy} \frac{d^3 U}{dz^3} = \frac{EI_{yy}}{L^3} \frac{d^3 U}{d\xi^3}, \quad (38) \\ S_y &= EI_{xx} \frac{d^3 V}{dz^3} = \frac{EI_{xx}}{L^3} \frac{d^3 V}{d\xi^3}. \end{aligned}$$

将式(34)、(35)分别代入到式(36)~式(38)中, 整理后可以得到 $x = l_1$ 处的状态矢量为

$$Z_l = \left[D \left(\frac{l_1}{L} \right) \right] A, \quad (39)$$

式中 $Z_l = [U, V, \theta_x, \theta_y, M_x, M_y, S_x, S_y]^T$, 以 $x = l_2$ 为输出端, 可以得到:

$$Z_o = \left[D \left(\frac{l_2}{L} \right) \right] \left[D \left(\frac{l_1}{L} \right) \right]^{-1} Z_l = U^S Z_l, \quad (40)$$

$$U^S = \left[D \left(\frac{l_2}{L} \right) \right] \left[D \left(\frac{l_1}{L} \right) \right]^{-1}, \quad (41)$$

式中 U^S 为旋转轴的传递矩阵.

3 计算与仿真对比验证

3.1 旋转梁的固有频率验证

为验证 MSTMM 计算旋转梁频率的准确性, 分别对转速为 0, 20, 40 rad/s 时悬臂梁的频率计算, 使用 MATLAB 编程计算与 Ansys Workbench 仿真结果的前五阶频率对比. 梁的参数分别为, 长度 $L = 6$ m, 横截面长 $b = 0.5$ m, 高 $h = 0.04$ m, 密度 $\rho = 334$ kg/m³, 弹性模量 $E = 7.1$ MPa, 剪切模量 $G = 2.730 8$ MPa, 泊松比 $\mu = 0.3$. ANSYS Workbench 的模型有 88 413 个节点, 网格单元数为 15 600.

计算结果与对比见表 1, 3 种转速下前五阶频率结果误差较小. 取 3 次相同计算条件下的平均时间, 使用 MATLAB 编程的计算时间为 6.3 s, ANSYS Workbench 的计算时间是 55.9 s. 计算速度提高了 8.8 倍.

表 1 悬臂梁在 3 种转速下 MSTMM 计算与 ANSYS 仿真的固有频率对比

Tab. 1 Comparison of natural frequencies of a cantilever beam obtained from MSTMM calculation and ANSYS simulation at three speeds

阶次	0 rad/s		误差/%
	MSTMM/Hz	ANSYS/Hz	
1	0.827	0.832	0.61
2	5.185	5.212	0.52
3	10.344	10.301	0.42
4	14.521	14.597	0.53
5	19.002	18.906	0.51

续表 1

阶次	20 rad/s		误差/%
	MSTMM/Hz	ANSYS/Hz	
1	3.454	3.460	0.17
2	9.596	9.616	0.21
3	10.438	10.391	0.45
4	19.267	19.448	0.93
5	19.706	19.765	0.30

阶次	40 rad/s		误差/%
	MSTMM/Hz	ANSYS/Hz	
1	6.625	6.632	0.11
2	10.706	10.650	0.53
3	16.826	16.843	0.10
4	20.540	20.987	1.34
5	29.948	29.990	0.17

表 2 圆截面悬臂旋转轴的固有频率($EI_{xx}=EI_{yy}$)

Tab.2 Natural frequencies of a cantilever spinning axis with circular cross-section ($EI_{xx}=EI_{yy}$)							Hz
ω_i^*	$\Omega^*=0$		$\Omega^*=2$		$\Omega^*=4$		
	MSTMM	文献[16]	MSTMM	文献[16]	MSTMM	文献[16]	
1	3.511	3.516	1.516	1.516	0.484	—	
2	3.511	3.516	5.515	5.516	7.516	7.516	
3	22.029	22.034	20.034	20.034	18.034	18.034	
4	22.029	22.034	24.034	24.034	26.034	26.034	
5	61.692	61.697	59.697	59.697	57.697	57.697	
6	61.692	61.697	63.697	63.697	65.697	65.697	

3.3 悬停直升机整机频率计算

为了验证 MSTMM 方法计算的准确性,对图 2 直升机模型进行验证计算. 直升机各部件的参数如下,桨叶密度 $\rho=334\text{ kg/m}^3$,长度 $L=6\text{ m}$,横截面长 $b=0.5\text{ m}$,高 $h=0.04\text{ m}$,弹性模量 $E=7.1\text{ MPa}$,剪切模量 $G=2.730\text{ 8 MPa}$;桨毂密度 $\rho=7\text{ 850 kg/m}^3$,尺寸为长和宽为 0.5 m ,高 0.3 m ;传动轴密度 $\rho=7\text{ 850 kg/m}^3$,尺寸为直径 0.16 m ,高为 1 m ,弹性模量 $E=2.5\text{ MPa}$,剪切模量 $G=9.615\text{ 4 MPa}$;机身密度 $\rho=170\text{ kg/m}^3$,长 3 m ,宽 1.8 m ,高 1.6 m ,质心与机身传动轴连接点在 X 轴上的投影距离 0.4 m ;尾梁密度 $\rho=140\text{ kg/m}^3$,截面高和宽为 0.8 m ,长为 4 m ,弹性模量 $E=2\text{ MPa}$,剪切模量 $G=7.692\text{ 3 MPa}$. 尾梁末端采用固定约束,旋翼系统的转速为 36.651 9 rad/s . ANSYS Workbench 模型的节点数 88 260 , 16 056 个单元. 前 12 阶频率见表 3.

3.2 旋转轴的频率计算结果验证

旋转轴的验证模型选择一根各向同性均匀圆截面梁,这个算例选择悬臂边界条件,此方法同样适用于其他边界条件. 以量纲一的形式呈现结果直观高效,定义以下量纲一的固有频率 ω_i^* 和旋转速度参数 Ω^* ,从而能够应用于一般情况.

$$\omega_i^* = \omega_i/\omega_0, \Omega^* = \Omega/\omega_0, \tag{42}$$

式中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{EI_{xx}EI_{yy}}}{mL^4}}$.

梁的参数分别为,长 $L=1.29\text{ m}$,抗弯刚度 $EI_{xx}=EI_{yy}=582.996\text{ N}\cdot\text{m}^2$,线质量 $\bar{m}=2.87\text{ kg/m}$. 使用 MSTMM 方法 MATLAB 编程计算结果与文献[16]中的前 6 阶频率对比结果见表 2,计算结果基本相同,在低转速下结果误差在 0.15% 内,随着转速提高,计算结果也越相近,而且在高转速下 MSTMM 方法依然可以求得低阶频率.

表 3 使用 MSTMM 方法计算旋转状态直升机固有频率与 ANSYS 仿真结果对比

Tab.3 Comparison of natural frequencies of helicopter model obtained from MSTMM calculation and ANSYS simulation in rotating state

阶次	MSTMM	ANSYS
1	6.365	6.368
2	6.368	6.371
3	9.533	9.638
4	10.714	10.726
5	10.798	10.731
6	10.816	10.753
7	16.158	16.163
8	16.163	16.169
9	16.167	16.173
10	20.596	20.789
11	20.598	20.794
12	24.894	—
13	28.997	28.982

计算结果与仿真结果基本一致. 3 次相同计算条件下的平均时间,使用 MATLAB 编程的计算时间为 11.5 s,ANSYS Workbench 的计算时间是 81.2 s. 计算速度提高了 7.1 倍. 由此可以使用 MSTMM 方法计算无约束条件即悬停状态下直升机模型的固有频率,前 8 阶的计算结果见表 4.

表 4 悬停状态下直升机模型固有频率
Tab. 4 Natural frequencies of helicopter model in hovering state

阶次	频率/Hz
1	0.780
2	1.082
3	2.534
4	6.187
5	6.365
6	10.437
7	10.816
8	16.079

4 结 论

- 1) 本文推导了旋转梁在挥舞、摆振和扭转 3 个自由度的运动方程,得到其传递矩阵,算例通过与 ANSYS 仿真结果对比,误差在 1.5% 以内,验证了结果的准确性.
- 2) 推导了旋转轴的传递矩阵,算例与参考文献结果对比,误差不超过 0.15% ,验证了准确性.
- 3) MSTMM 可以快速准确地计算动力学问题. 并且相较于传统动力学软件 Workbench ANSYS,结果相近,计算时间大大缩短,本文算例计算时间缩短了 7 倍以上.
- 4) 对直升机旋翼/机身耦合系统验证计算,与仿真结果基本一致,并得到了悬停状态下的前 8 阶固有频率,对直升机设计具有一定参考价值.

参考文献

[1] CHENG Jianlian, XU Hui. Inner mass impact damper for attenuating structure vibration [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(17): 5355. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.07.026

[2] YANG J B, JIANG L J, CHEN D C. Dynamic modelling and control of a rotating Euler-Bernoulli beam [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 274(3/4/5): 863. DOI:10.1016/S0022-460X(03)00611-4

[3] VINOD K G, GOPALAKRISHNAN S, GANGULI R. Free vibration and wave propagation analysis of uniform and tapered rotating beams using spectrally formulated finite elements[J]. International Journal

of Solids and Structures, 2007, 44(18/19): 5875. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2007.02.002

[4] PNUELI D. Natural bending frequency comparable to rotational frequency in rotating cantilever beam [J]. Journal of Applied Mechanics, 1972, 39(2): 602. DOI:10.1115/1.3422729

[5] FOX C H J, BURDESS J S. The natural frequencies of a thin rotating cantilever with offset root [J]. Journal of Sound and Vibration, 1979, 65(2): 151. DOI:10.1016/0022-460X(79)90509-1

[6] BANERJEE J R, SU H, JACKSON D R. Free vibration of rotating tapered beams using the dynamic stiffness method [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 298(4/5): 1034. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.06.040

[7] PAWAR P M, GANGULI R. On the effect of progressive damage on composite helicopter rotor system behavior [J]. Composite Structures, 2007, 78(3): 410. DOI:10.1016/j.compstruct.2005.11.043

[8] WANG Gang, WERELEY N M. Free vibration analysis of rotating blades with uniform tapers [J]. AIAA Journal, 2004, 42(12): 2429. DOI:10.2514/1.4302

[9] LEE J W, LEE J Y. Free vibration analysis using the transfer-matrix method on a tapered beam [J]. Computers & Structures, 2016, 164(C): 75. DOI: 10.1016/j.compstruc.2015.11.007

[10] LEE J W, LEE J Y. In-plane bending vibration analysis of a rotating beam with multiple edge cracks by using the transfer matrix method [J]. Meccanica, 2017, 52(4/5): 1143. DOI:10.1007/s11012-016-0449-4

[11] RONG Bao, RUI Xiaoting, WANG Guoping. New method for dynamics modelling and analysis on flexible plate undergoing large overall motion [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part K: Journal of Multi-body Dynamics, 2010, 224(1): 33. DOI: 10.1243/14644193JMBD219

[12] RUI Xiaoting, ZHANG Jianshu, ZHOU Qinbo. Automatic deduction theorem of overall transfer equation of multibody system [J]. Advances in Mechanical Engineering, 2015, 6: 378047. DOI: 10.1155/2014/378047

[13] ABBAS L K, ZHOU Qinbo, BESTLE D, et al. A unified approach for treating linear multibody systems involving flexible beams [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 107: 197. DOI:10.1016/j.mechmachtheory.2016.09.022

[14] RUI Xiaoting, WANG Xun, ZHOU Qinbo, et al. Transfer matrix method for multibody systems (Rui method) and its applications [J]. Science China (Technological Sciences), 2019, 62(5): 712. DOI: 10.1007/s11431-018-9425-x

[15] RUI Xiaoting, ABBAS L K, YANG Fufeng. Flapwise vibration computations of coupled helicopter rotor/fuselage: Application of multibody system dynamics [J]. AIAA JOURNAL, 2018, 56(2): 818. DOI: 10.2514/1.J056591

[16] BANERJEE J R, SU H. Development of a dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of spinning beams [J]. Computers & Structures, 2004, 82(23/24/25/26): 2189. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.058

(编辑 张 红)